参考答案

第十章 概率

64 有限样本空间与随机事件

做一做：1．随机事件；

2．随机事件；

3. 必然事件；

4. 不可能事件.

讲一讲：1．Ω={正面朝上，反面朝上}

2．Ω={(正面,正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面，反面)}

3. 样本空间为 Ω={0，1，2，3}，事件 A={0} 表示的实际意义是：抽取的 5 件产品中，没有次品.

练一练：1．Ω={1，2，3，4，5，6}

2．用(1，2)表示第一次掷出 1 点，第二次掷出 2 点，其他的样本点用类似的方法表示，则可知所有样本点均可表示成(i, j)的形式，其中i, j都是$1,2,3,4,5,6$中的数，因此样本空间

$\Omega=\{(i,j)|1\le i\le 6,1\le j\le 6,i\in N,j\in N\}$，或者写成

Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

3.（1）样本空间为 Ω={0，1，2，3}；（2）A={0}；（3）抽取的 3 件产品中，次品数不超过 1 件

达标测试：1. C

2. Ω={0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}；A={7，8，9，10}

3.（1）{0，1，2，3}；（2）{（男男），（男女），（女男），（女女）}

65 事件的关系与运算

做一做：1．$A\subseteq\Omega,B\subseteq\Omega,C\subseteq\Omega,D\subseteq\Omega$，$A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，且$\Omega=C\cup D$

讲一讲：1.（1）按照定义有$A+B$；

（2）因为 B 不发生表示为$\overline{B}$，因此可以写成$A\overline{B}$；

（3）按照定义有$\overline{A}\,\overline{B}$

2. (1)样本空间为 Ω={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}.

(2) A={(1,0),(1,1)}， B={(0,1),(1,1)}，

$\overline{A}=\{(0,0),(0,1)\}$，$\overline{B}=\{(0,0),(1,0)\}$；

(3) $A\cup B=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$， $\overline{A}\cap\overline{B}=\{(0,0)\}$；

$A\cup B$表示电路正常；$\overline{A}\cap\overline{B}$表示电路工作不正常；

$A\cup B$和$\overline{A}\cap\overline{B}$互为对立事件.

练一练：1. （1）$A\overline{B}$；（2）$\overline{A}\,\overline{B}$

2.

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$，

（1）设 A=“至少一个白球”，

$A=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

设 B=“两个都是白球”，$B=\{(3,4)\}$，$B\subseteq A$；

（2）设 C=“至少有一个红球”，

$C=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$，

因为$A\cap C=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$，所以 A 与 C 不包含，不互斥；

（3）设 D=“都是红球”，$D=\{(1,2)\}$，因为 $A\cup D=\Omega, A\cap D=\varnothing$，所以 A 与 D 为对立事件.

达标测试：1. {向上的点数是 1 或 3 或 4}，{向上的点数是 3}

2. （1）互斥不对立；（2）不互斥；（3）互斥对立；（4）不互斥

66 古典概型

做一做：（1）$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$；（2）$A=\{1,3,5\}$

讲一讲：1.（1）不是，因为整数有无数个，不满足古典概型样本点有限性. （2）是. 由古典概型的定义可知.

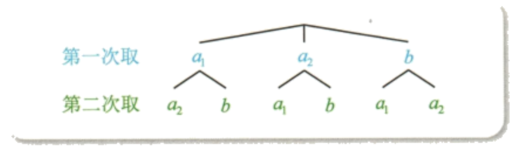
2. 考虑高一（1）班从 10 个出场序号签中抽一个签的试验，其样本空间可记为：

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，共包含 10 个样本点.

记 A：抽到的出场序号小于 4，则不难看出：

$A=\{1,2,3\}$，A 包含的样本点个数为 3，则$P(A)=\dfrac{3}{10}$

3. 按题意，取产品的过程可以用如图树形图直观表示：



因此样本空间可记为：

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b),(a_2,a_1),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2)\}$

共包含 6 个样本点.

用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”，则

$A=\{(a_1,b),(a_2,b),(b,a_1),(b,a_2)\}$

A 包含的样本点个数为 4，所以$P(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

练一练：1. B，只有③是古典概型

2. 试验有选 A，选 B，选 C，选 D 共 4 种可能结果，试验的样本空间可以表示为 Ω={A，B，C，D}，有 4 个样本点. 考生随机选择一个答案，表明每个样本点发生的可能性相等，所以这是一个古典概型.

设 M=“选中正确答案”，因为正确答案是唯一的，所以事件 M 有 1 个样本点. 所以，考生随机选择一个答案，答对的概率$P(M)=\dfrac{1}{4}$.

3. 三件正品记为a_1,a_2,a_3，一件次品记为 b，样本空间为：

$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,b),(a_2,a_3),(a_2,b),(a_3,b)\}$

共包含 6 个样本点.

用 A 表示“取出的两件中，恰好有一件次品”，则

$A=\{(a_1,b),(a_2,b),(a_3,b)\}$，$A$ 包含的样本点个数为 3，所以$P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

达标测试： 1. B；2. B.

67　事件的相互独立性

做一做： $P(A)=\frac{1}{6}$，则 $P(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

讲一讲： 1. 因为样本空间 Ω={(*m*，*n*)|*m*，*n*∈{1，2，3，4}，且 $m\neq n$}，共有 12 个样本点，

A={(1，2)，(1，3)，(1，4)，(2，1)，(2，3)，(2，4)}，

B={(1，2)，(2，1)，(3，1)，(3，2)，(4，1)，(4，2)}，

AB={(1，2)，(2，1)}. 所以，

$P(A)=P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{6}$

此时 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，因此，事件 *A* 与事件 *B* 不独立.

2. 设 *A*=“甲中靶”，*B*=“乙中靶”，则 $\overline{A}$=“甲脱靶”，$\overline{B}$ = “乙脱靶”. 由于两个人射击的结果互不影响，所以 *A* 与 *B* 相互独立，*A* 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 *B*，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 都相互独立. 由已知可得，$P(A)=0.8$，$P(B)=0.9$，$P(\overline{A})=0.2$，$P(\overline{B})=0.1$.

（1）*AB*=“两人都中靶”，由事件独立性的定义得 $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72$；

（2）“恰有一人中靶”$=A\overline{B}\cup\overline{A}B$，且 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥，根据概率的加法公式和事件独立性定义，得

$$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$$
$$=0.8\times0.1+0.2\times0.9=0.26$$

（3）事件“两人都脱靶”$=\overline{A}\overline{B}$，所以

$P(\overline{A})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.8)(1-0.9)=0.02$；

（4）方法 1：事件“至少有一人中靶”$=AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B$，且 *AB*，$A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 两两互斥，所以

$P(AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(AB)+P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=0.72+0.26=0.98$；

方法 2：由于事件“至少有一人中靶”的对立事件是“两人都脱靶”，根据对立事件的性质，得事件“至少有一人中靶”的概率为 $1-P(\overline{A}\overline{B})=1-0.02=0.98$.

3. 设 A_1,A_2 分别表示甲两轮猜对 1 个，2 个成语的事件，B_1,B_2 分别表示乙两轮猜对 1 个，2 个成语的事件，根据独立性假定，得

$P(A_1)=2\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8},P(A_2)=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$.

$P(B_1)=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9},P(B_2)=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$.

设 *A*=“两轮活动‘星队’猜对 3 个成语”，则 $A=A_1B_2\cup A_2B_1$，且 A_1B_2 与 A_2B_1 互斥，A_1 与 B_2，A_2 与 B_1 分别相互独立，所以

$$P(A)=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)$$
$$=\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}+\frac{9}{16}\times\frac{4}{9}=\frac{5}{12}$$

练一练： 1. 如果用 (i,j) 表示甲得到的点数 i，乙得到的点数 j，则样本空间可以记为：$\Omega=\{(i,j)|i,j=1,2,3,4,5,6\}$，事件 $A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$，有 6 个样本点，事件 $B=\{(i,j)|i=1,2,3,4,5,6,j=1,3,5\}$，有 18 个样本点. 因此，$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$. 又因为 $AB=\{(2,1),(2,3),(2,5)\}$，所以，$P(AB)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. 因为 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以 *A* 与 *B* 相互独立.

2. （1）记事件 *A*：甲投中，*B*：乙投中，因为 *A* 与 *B* 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.7\times0.8=0.56$，即都命中的概率为 0.56；

（2）记事件 A_i：甲第 *i* 次投中，其中 *i*=1，2，则 $P(A_1)=P(A_2)=0.7$. 恰好投中一次，可能是第一次投中且第二次没投中，也可能是第一次没投中且第二次投中，即 $A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$. 而 A_1 与 A_2 相互独立，且 $A_1\overline{A_2}$ 与 $\overline{A_1}A_2$ 互斥，因此

$$P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=$$
$$P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)=P(A_1)[1-P(A_2)]+[1-P(A_1)]P(A_2)$$
$$=0.7\times(1-0.7)+(1-0.7)\times0.7=0.42.$$

3. 记事件 A_i：该同学第 *i* 题猜对了，其中 *i*=1，2，3，则 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$.

（1）三道题都猜对可以表示为 $A_1A_2A_3$，又因为 A_1，A_2，A_3 相互对立，因此

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$.

（2）“至少猜对一道题”的对立事件是“三道题都猜错”，后者表示为 $\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$，所以

$P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=(1-\frac{1}{4})^3=\frac{27}{64}$，因此所求概率为 $1-P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3})=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}$.

达标测试： 1. B　解析：“恰有一人击中”指“甲击中而乙没有击中”或者是“甲没有击中而乙击中”，因此概率为 $0.7\times0.3+0.3\times0.7=0.42$

2. $\frac{1}{3}$　$\frac{2}{3}$　解析：都未解决的概率为 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，问题得到解决就是至少有 1 人能解决问题，$\therefore P=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

68　频率与概率

做一做： $\frac{3}{10}$

讲一讲： 1.（1）2014 年男婴出生的频率为 $\frac{115.88}{100+115.88}\approx0.537$，2015 年男婴出生的频率为

$\frac{113.51}{100+113.51}\approx 0.532$. 由此估计，我国 2014 年男婴出生率约为 0.537，2015 年男婴出生率约为 0.532.

（2）由于调查新生人数的样本非常大，根据频率的稳定性，上述对男婴出生率的估计具有较高的可信度. 因此，我们有理由怀疑“生男孩和生女孩是等可能的”的结论.

2. 当游戏玩了 10 次时，甲、乙获胜的频率都为 0.5；当游戏玩了 1000 次时，甲获胜的频率为 0.3，乙获胜的频率为 0.7. 根据频率的稳定性，随着试验次数的增加，频率偏离概率很大的可能性会越来越小. 相对 10 次游戏，1000 次游戏时的频率接近概率的可能性更大，因此我们更愿意相信 1000 次时的频率离概率更近，而游戏玩到 1000 次时，甲、乙获胜的频率分别是 0.3 和 0.7，存在很大差距，所以有理由认为游戏是不公平的. 因此，应该支持甲对游戏公平性的判断.

3. 由频率分布直方图可以看出，所抽取的学生成绩中，在[90，100]内的频率为 $0.01\times(100-90)=0.1$. 因为由样本的分布可以估计总体的分布，所以全校学生的数学得分在[90，100]内的概率可以估计为 0.1，根据用频率估计概率的方法可知，随机抽取一名学生，这名学生该次数学成绩在[90，100]内的概率可以估计为 0.1.

练一练：1. 可以算得，2013 年北京地区科普专职人员占所有科普人员的比例为：$\frac{7727}{48800}\approx 0.16$，因此张明是科普专职人员的概率为 0.16.

2.（1）0.75，0.80，0.80，0.85，0.83，0.80，0.78;（2）概率约为 0.8;（3）不一定. 投 10 次篮相当于做 10 次试验，每次试验的结果都是随机的，所以投 10 次篮的结果也是随机的.

3. 64，0.32　解析：由图易知，组距为 4，故样本落在[6，10)内的频率为 $0.08\times4=0.32$，频数为 $0.32\times200=64$，因此数据落在[6，10)内的概率约为 0.32.

达标测试：1. 0.03 解析：因为试验次数较大，可以用频率估计概率，则概率约为 $\frac{600}{20000}=0.03$

2. B 解析：$1534\times\frac{28}{254}\approx169$